ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHAN BÍCH HOÀI

SỐ CATALAN VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHAN BÍCH HOÀI

SỐ CATALAN VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Lời mở đầu

Dãy số Fibonacy và dãy Lucas được ví như “hai vì sao sáng trong bầu trời rộng lớn các dãy số nguyên”. Các ứng dụng phong phú của chúng tạo nên tính hấp dẫn. Hơn nữa, cùng với sự dễ dàng đánh giá của các dãy số này đã thu hút được sự quan tầm của những nhà toán học chuyên nghiệp lẫn không chuyên. Tuy nhiên, các số Catalan thậm chí tuyệt vời. Nó được ví là giống như “Ngôi sao Bắc cực trong bầu trời đêm”, chúng là ánh sáng tuyệt đẹp và tỏa sáng trong bầu trời toán học. Chúng tiếp tục cung cấp mảnh đất màu mỡ cho các nhà lý thuyết số, đặc biệt là những người đam mê số Catalan và khoa học máy tính.

Từ khi xuất bản của Euler về bài toán tam giác phân đa diện lồi (năm 1751) và bài toán dãy dấu ngoặc đơn của Catalan (năm 1838), đã có gần 400 bài báo và các vấn đề về số Catalan đã xuất hiện trong ấn phẩm định kỳ khác nhau. Chúng toát ra vẻ đẹp và tính phổ biến của số Catalan.

Nhiều nhà toán học chuyên nghiệp và không chuyên có thể biết dãy Catalan, nhưng có thể không quen với vô số sự xuất hiện bất ngờ, các ứng dụng thiết thực, tính chất, hoặc các mối quan hệ thú vị và đáng ngạc nhiên trong số rất nhiều ví dụ của chúng. Số Catalan được sử dụng trong nhiều lĩnh vực như đại số, số học, hình học, lỹ thuyết đồ thị, ... Xuất phát từ những lí do đó nên tôi mạnh dạn chọn đề tài: “Số Catalan và ứng dụng” dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Đàm Văn Nhỉ.

Đây là một bài tổng quan về số Catalan và ứng dụng của nó. Trong luận văn này chúng tôi trình bày lại một vài kết quả chẳng hạn như hàm sinh thường, số Catalan, tam giác Pascal, hệ số tổ hợp, ... Qua đề tài này giúp người đọc hiểu sâu hơn về nguồn gốc và tính chất của số Catalan, thấy được sự phổ biến của số Catalan trong nhiều bài toán đếm khác nhau của toán học.

Nôi dung của luận văn gồm hai chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị. Chương này trình bày có hệ thống các kiến thức cơ sơ, các công cụ hỗ trợ liên tiếp nhau để xây dựng công thức tổng quát của dãy đệ quy bằng phương pháp hàm sinh.

Chương 2. Số Catalan. Chương 2 là nội dung chính của luận văn, trong chương này, chúng tôi trình bày đầy đủ tính chất của số Catalan. Một số ứng dụng tiêu biểu của số Catalan bao gồm đếm số cây đồ thị, đếm số phân hoạch không cắt nhau. Mục cuối cùng trình bày nhiều cách khác nhau đều thu được số Catalan từ tam giác Pascal.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TS. Đàm Văn Nhỉ. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy đã tận tâm truyền đạt kiến thức, giúp đỡ tác giả hoàn thành luận văn này.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, tác giả nhận được sự quan tâm, giúp đỡ của Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, các thầy cô đã tham gia giảng dạy lớp cao học Toán K8YB. Tác giả xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ quý báu đó.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2016

Học viên

Phan Bích Hoài

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chúng tôi bắt đầu luận văn bằng cách trình bày các công cụ cần thiết để xây dựng số Catalan. Dạng tổng quát của số Catalan có thể được xây dựng thông qua phương pháp hàm sinh. Nhưng trước khi bắt đầu với phương pháp hàm sinh, ta cần nhắc lại các định nghĩa về ánh xạ, quy tắc đếm, truy hồi, qui nạp, chuỗi Maclaurin, chuỗi lũy thừa hình thức. Nội dung của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1, 2] và nhiều tài liệu khác.

1.1 Quan hệ tương đương và ánh xạ

1.1.1 Quan hệ tương đương

Giả thiết tập $X \neq \emptyset$. Tích Đềcác $X \times X$ được định nghĩa như dưới đây:

$$X \times X = \{(x, y) | x, y \in X\}.$$

Định nghĩa 1.1.1. Tập con S của $X \times X$ được gọi là một *quan hệ hai ngôi* trong X nếu $(x, y) \in S$, khi đó ta nói *x có quan hệ S với y* và viết xSy.

Định nghĩa 1.1.2. Giả thiết $X \neq \emptyset$ và $S \neq \emptyset$ là một quan hệ hai ngôi trong X. Quan hệ S được gọi là một *quan hệ tương đương* trong X nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

(i) (Phản xạ) Với mọi $x \in X$ có xSx.

(ii) (Đối xứng) Với mọi $x, y \in X$, nếu có xSy thì cũng có ySx.

(iii) (Bắc cầu) Với mọi $x, y, z \in X$, nếu có xSy và ySz thì cũng có xSz.

Khi S là một quan hệ tương đương trong X thì ta thường ký hiệu $\sim$ thay cho S. Đặt $C(x) = \{y \in X | y \sim x\}$ và gọi nó là một *lớp tương đương* với x làm *đại diện*. Dễ dàng chỉ ra các tính chất sau:

Tính chất 1.1.3. *Giả sử $\sim$ là quan hệ tương đương trong $X \neq \emptyset$. Khi đó*

(1) *Với mọi $x \in X$ có $x \in C(x)$.*

(2) *Với mọi $y, z \in C(x)$ có $y \sim z$ và $y, z \sim x$.*

(3) *Với mọi $x, y \in X$, có hoặc $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ hoặc $C(x) = C(y)$.*

(4) *Tập thương $X/\sim$ là tập các lớp tương đương không giao nhau.*

1.1.2 Ánh xạ và phép toán

Giả thiết tập X và tập Y đều khác rỗng. Tích Đềcác $X \times Y$ được định nghĩa như sau:

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}.$$

Số phần tử của tập X hữu hạn gọi là lực lượng của X và được ký hiệu bởi $|X|$.

Mệnh đề 1.1.4. *Nếu $|X| = m$ và $|Y| = n$ đều là những số hữu hạn thì $|X \times Y| = |X|.|Y| = mn$.*

Định nghĩa 1.1.5. Một quy tắc f đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử xác định duy nhất $y \in Y$ được gọi là một *ánh xạ* và được biểu diễn thành

$$f : X \to Y, x \mapsto y = f(x).$$

Tập X được gọi là *tập nguồn* hay *miền xác định*, tập Y được gọi là *tập đích* hay *miền giá trị* của ánh xạ f. Phần tử $y = f(x)$ được gọi là *ảnh* của x và x được gọi là *tạo ảnh* của y.

Định nghĩa 1.1.6. Hai ánh xạ $f, g : X \to Y$ được gọi là *bằng nhau* và được viết $f = g$ nếu $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$. Ánh xạ $id : X \to X, x \mapsto x$, được gọi là ánh xạ *đồng nhất*. Với tập con $A \subset X$, ánh xạ $in : A \to X, a \mapsto a$, được gọi là phép nhúng chìm.

Định nghĩa 1.1.7. Ánh xạ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n = f(n)$, còn được gọi là một *dãy số*. Tập tất cả các ảnh a_n được gọi là *dãy* (a_n) với số hạng thứ n là a_n. Dãy (a_n) được gọi là một *cấp số cộng* nếu có số cố định d để $a_{n+1} = a_n + d$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Trong trường hợp này d còn được gọi là *công sai* của cấp số cộng (a_n).

Định nghĩa 1.1.8. Xét dãy số (a_n). Dãy (a_n) được gọi là một *cấp số nhân* nếu có số cố định q để $a_{n+1} = a_n.q$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Trong trường hợp này q còn được gọi là *công bội* của cấp số nhân (a_n).

Định nghĩa 1.1.9. Cho hai tập hợp khác rỗng X và Y. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một *đơn ánh* nếu mọi $a, b \in X, a \neq b$ thì $f(a) \neq f(b)$. Khi f là một đơn ánh thì ta thường nói rằng, f là ánh xạ 1-1 từ X *vào* Y. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một *toàn ánh* nếu với mỗi $y \in Y$ đều tồn tại $x \in X$ để $y = f(x)$. Khi f là một toàn ánh thì ta thường nói rằng, f là ánh xạ từ X *lên* Y. Chú ý rằng, trong trường hợp này ta có $f(X) = Y$ hay $\mathrm{Im} f = Y$.

Định nghĩa 1.1.10. Cho hai tập hợp khác rỗng X và Y. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một *song ánh* nếu f đồng thời vừa là đơn ánh và cũng là toàn ánh.

Sự liên quan giữa lực lượng tập hợp và ánh xạ qua các chú ý sau đây: Xét ánh xạ $f : X \to Y$ với $|X|, |Y| < \infty$. Khi đó

(1) Nếu f là đơn ánh thì $|X| \leqslant |Y|$.

(2) Nếu f là toàn ánh thì $|X| \geqslant |Y|$.

(3) Nếu f là song ánh thì $|X| = |Y|$.

1.1.3 Nguyên lý Bù-Trừ

Khi xét bài toán tổ hợp, ta thường phải đếm xem có bao nhiêu cấu hình có thể tạo ra với những yêu cầu đặt trước. Nói chung, để đếm các cấu hình đã cho người ta tìm cách đưa các cấu hình về loại quen thuộc qua việc phân ra thành các lớp để áp dụng nguyên lý cộng dưới đây:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Tổng quát nguyên lý cộng ta có Nguyên lý Bù-Trừ. Cái khó của việc vận dụng nguyên lý Bù-Trừ là việc phân lớp như thế nào để dễ dàng có được các số đếm.

Giả sử $A_1, \ldots, A_n$ là những tập con của tập A. Các số s_k được xác định qua

$$\begin{aligned}
s_0 &= |A| \\
s_1 &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
s_2 &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n| \\
&\ldots \\
s_k &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \\
&\ldots \\
s_n &= |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

và các số e_k được định nghĩa bởi: e_k là số tất cả các phần tử của A chứa trong đúng k tập con trong số các tập con $A_1, \ldots, A_n$. Ta sẽ tìm quan hệ giữa các số s_i và e_k. Trước tiên ta chứng minh một kết quả rất đẹp sau đây:

Định lý 1.1.11 (Nguyên lý Bù-Trừ)**.** *Cho các tập hữu hạn $A_1, \ldots, A_n$. Khi đó*

$$\begin{aligned}
|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&- \cdots + (-1)^{n+1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i|.
\end{aligned}$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp qui nạp. Trước tiên ta thấy $n = 1$ kết luận đúng. Với $n = 2$, xét hai tập hợp A, B với lực lượng hữu hạn. Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì hiển nhiên $|A \cup B| = |A| + |B|$. Nếu $C = A \cap B \neq \emptyset$ thì ta có $A \cup B = (A \setminus B) \cup C \cup (B \setminus A)$. Vì các tập này đôi một giao nhau bằng rỗng, nên $|A \cup B| = |A \setminus B| + |C| + |B \setminus A|$. Vì $|A \setminus B| = |A| - |C|$ và $|B \setminus A| = |B| - |C|$, nên $|A \cup B| = |A| + |B| - |C|$, (1). Khi $n > 2$ giả thiết kết luận đúng cho $n - 1$ tập. Đặt $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$. Theo công thức (1) ta có

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |A \cup A_n| = |A| + |A_n| - |A \cap A_n|.$$

Sử dụng giả thiết qui nạp cho $|A|$ và $|A \cap A_n|$ sẽ nhận được công thức. □

Hệ quả 1.1.12. $e_0 = s_0 - s_1 + s_2 - \cdots + (-1)^n s_n; s_0 = e_0 + e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.

Chứng minh. Hiển nhiên $e_0 = |A| - |\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i|$ và theo Định lý 1.1.11 ta nhận được $e_0 = s_0 - s_1 + s_2 - \cdots + (-1)^n s_n$. Vì $|A| = |A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i| + |\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i|$ nên ta nhận được $s_0 = e_0 + e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. □

Ví dụ 1.1.13. Có bao nhiêu số tự nhiên $n \in A = \{1, 2, \ldots, 105\}$ có ước chung không tầm thường với số 105.

Lời giải. Viết $105 = 3.5.7$. Số tự nhiên n có ước chung không tầm thường với số 105 phải chia hết cho hoặc 3 hoặc 5 hoặc 7. Ký hiệu $A_3 = \{3k | k \in \mathbb{N}\} \subset A$, $A_5 = \{5k | k \in \mathbb{N}\} \subset A$ và $A_7 = \{7k | k \in \mathbb{N}\} \subset A$. Ta có $|A_3| = [\frac{105}{3}] = 35, |A_5| = [\frac{105}{5}] = 21, |A_7| = [\frac{105}{7}] = 15$; và $|A_3 \cap A_5| = [\frac{105}{15}] = 7$, $|A_3 \cap A_7| = [\frac{105}{21}] = 5$, $|A_5 \cap A_7| = [\frac{105}{35}] = 3$. Tính $|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = [\frac{105}{105}] = 1$. Số T các số thuộc A có ước chung không tầm thường với số 105 là

$$T \ = \ |A_3 \cup A_5 \cup A_7| = (35 + 21 + 15) - (7 + 5 + 3) + 1 = 57.$$

Vậy $T = 57$. □